



[This question paper contains 06 printed pages]

[इस प्रश्न पत्र में 06 मुद्रित पृष्ठ हैं]

Himachal Pradesh Administrative Service Combined Competitive (Main /  
Written) Examination, 2020

हिमाचल प्रदेश प्रशासनिक सेवा संयुक्त प्रतियोगी (मुख्य / लिखित) परीक्षा, 2020

STATISTICS (PAPER-I)

सांख्यिकी (पेपर-I)

Time allowed: Three Hours

Maximum Marks: 100

निर्धारित समय: तीन घंटे

अधिकतम अंक: 100

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

प्रश्न पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें।

1. There are EIGHT questions printed both in English & Hindi.  
इसमें आठ प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिंदी दोनों में छपे हैं।
2. Candidate has to attempt FIVE questions in all in English or Hindi.  
उम्मीदवार को कुल पांच प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में देने हैं।
3. Question No.1 is compulsory. Out of the remaining SEVEN questions, FOUR are to be attempted.  
प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। शेष सात प्रश्नों में से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
4. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question / part is indicated against it.  
सभी प्रश्नों के समान अंक हैं। प्रत्येक प्रश्न / भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।
5. Write answer in legible handwriting. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.  
सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखें। प्रश्न के प्रत्येक भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए।
6. Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.  
यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आंकड़ों का चयन करें तथा उनको निर्दिष्ट करें।
7. Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.  
प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो। छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिये।
8. Re-evaluation / Re-checking of answer book of the candidate is not allowed.  
उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन / पुनः जाँच की अनुमति नहीं है।

1. (a) Suppose that four digits 1, 2, 3 and 4 are written down in random order. What is probability that at least one digit will occupy its proper place? (6)

मान लीजिए कि चार अंक 1,2,3 और 4 यादृच्छिक क्रम में लिखे गए हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि कम से कम एक अंक अपने उचित स्थान पर आ जाएगा?

- (b) Define Hypergeometric distribution and obtain its mean and variance. How the Hypergeometric distribution differs from binomial distribution? (6)

पराज्यामिति वितरण को परिभाषित करें और इसका माध्य और विचरण प्राप्त करें। पराज्यामिति वितरण द्विपद वितरण से कैसे भिन्न होता है?

- (c) Discuss the concept of confidence interval. Obtain  $100(1-\alpha)\%$  confidence intervals for the parameter “ $\theta$ ” for the distribution when  $\sigma$  is unknown

$$f(x; \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty \text{ and } 0 < \sigma < \infty.$$

विश्वास अंतराल की अवधारणा की व्याख्या करें. बंटन

$$f(x; \theta, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty \text{ and } 0 < \sigma < \infty.$$

के प्राचल “ $\theta$ ” के लिए  $100(1-\alpha)\%$  विश्वास अंतराल प्राप्त करें जब कि  $\sigma$  अज्ञात हो. (8)

2. (a) State and prove Baye’s theorem. There are two boxes, 1 and 2, each with two drawers. box 1 has a gold coin in one drawer and a silver coin in the other drawer, while box 2 has a gold coin in each drawer. One box is selected at random; then a drawer is chosen at random from the chosen box. The coin found in this drawer turns out to be gold. What is the probability that the coin came from box 2? (10)

बेज के प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए। दो बॉक्स हैं, 1 और 2, प्रत्येक में दो दराज हैं। बॉक्स 1 में एक दराज में एक सोने का सिक्का और दूसरे दराज में एक चांदी का सिक्का है, जबकि बॉक्स 2 में प्रत्येक दराज में एक सोने का सिक्का है। यादृच्छिक रूप से एक बॉक्स का चयन किया जाता है; फिर चुने हुए बॉक्स में से एक दराज को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इस दराज में मिला सिक्का सोने का निकला। इसकी क्या प्रायिकता है कि सिक्का डिब्बा 2 से आया है?

- (b) The joint probability density function of a two dimensional random variable (X, Y) is given by:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |y| < x \text{ and } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find marginal distributions of X and Y and hence the values of  $E(X + 3)$ ,  $E(Y - 3)$  and  $E(X + 3)(Y - 3)$ . (10)

द्विविमीय यादृच्छिक चर (X, Y) का संयुक्त संभाव्यता घनत्व फलन निम्नवत दिया गया है:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |y| < x \text{ and } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

X और Y के सीमांत वितरण निकालें और इसकी सहायता से  $E(X+3)$ ,  $E(Y-3)$  और  $E(X+3)(Y-3)$  के मान ज्ञात करें।

3. (a) Describe the methods of construction of different types of diagrams and graphs used to represent the data related with discrete and continuous type of variables (at least two for each type of variable). (10)

असतत और सतत प्रकार के चरों (प्रत्येक प्रकार के चर के लिए कम से कम दो) से संबंधित आकड़ों का प्रतिनिधित्व करने के लिए उपयोग किए जाने वाले विभिन्न प्रकार के आरेखों और ग्राफ़ (प्रत्येक प्रकार के चर के लिए कम से कम दो) के निर्माण के तरीकों का वर्णन करें।

- (b) Following is a continuous frequency distribution of a variable X where  $f_i$  and  $y_i$  are frequency and mid value of  $i^{\text{th}}$  class interval respectively. Width of each class interval is same. Both the mean and variance of X obtained from given frequency distribution are 10. Obtain median of the variable X. (10)

Class Interval	$X_1-X_2$	$X_2-X_3$	$X_3-X_4$	$X_4-X_5$	$X_5-X_6$	$X_6-X_7$	$X_7-X_8$
Mid value	$y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$d_i$ $= \frac{(y_i - y_4)}{\text{width of class}}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_i$	1	3	4	4	4	3	1

क चर X का सतत बारंबारता वितरण निम्नलिखित है जहां  $f_i$  और  $y_i$ , क्रमशः  $i^{\text{th}}$  वर्ग अंतराल की आवृत्ति और मध्यमान हैं। प्रत्येक वर्ग अंतराल की चौड़ाई एक समान है। दिए गए बारंबारता बंटन से प्राप्त X का माध्य और प्रसरण दोनों 10 हैं। चर X की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्ग-अन्तराल	$X_1-X_2$	$X_2-X_3$	$X_3-X_4$	$X_4-X_5$	$X_5-X_6$	$X_6-X_7$	$X_7-X_8$
मध्यमान	$y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$d_i = \frac{(y_i - y_4)}{\text{width of class}}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_i$	1	3	4	4	4	3	1

4. (a) Define Poisson distribution? Explain the real life situations in which application of Poisson distribution is more suitable. For Poisson distribution with parameter  $\lambda$  show that

$$\mu_{r+1} = r \lambda \mu_{r-1} + \lambda \frac{\partial \mu_r}{\partial \lambda}$$

and hence obtain  $\beta_1$  and  $\beta_2$  of the distribution. (10)

प्लासा बंटन को परिभाषित करें? वास्तविक जीवन की उन स्थितियों की व्याख्या कीजिए जिनमें प्लासा बंटन का प्रयोग अधिक उपयुक्त होता है। प्राचल  $\lambda$  वाले प्लासा बंटन के लिए दिखाएँ कि

$$\mu_{r+1} = r \lambda \mu_{r-1} + \lambda \frac{\partial \mu_r}{\partial \lambda}$$

और इसकी सहायता से बंटन के  $\beta_1$  और  $\beta_2$  को प्राप्त करें।

- (b) Let  $X \sim b(n, p)$ ,  $0 < p < 1$ . If  $U = \frac{X}{n}$  and  $V = \frac{n-X}{n}$  then show that there is perfect linear correlation between U and V. (10)

मान लें कि  $X \sim b(n, p)$ ,  $0 < p < 1$ . यदि  $U = \frac{X}{n}$  और  $V = \frac{n-X}{n}$  हों तो दिखाइए कि U और V के बीच पूर्ण रैखिक सहसम्बन्ध है।

5. (a) Define Bivariate normal distribution? If bivariate random variable (X,Y) follows bivariate normal distribution then show that the conditional distribution of  $Y|X=x$  is univariate normal distribution. (10)

द्विचर प्रसामान्य बंटन को परिभाषित करें? यदि द्विचर यादृच्छिक चर (X,Y) द्विचर प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करता है तो दिखाएँ कि  $Y|X=x$  का सशर्त बंटन एक चर वाला प्रसामान्य बंटन है।

- (b) Discuss the difference between correlation and regression. Let  $4Y-X+2=0$  and  $8Y-X-24=0$  are two regression lines on the basis of paired observation (X,Y). Find followings:

- (i) Mean of both variable
- (ii) The acute angle between two lines
- (iii) Increase or decrease percent in predicted value of X if Y changes from Y=2 to Y=4
- (iv) Coefficient of correlation between X and Y?
- (v) Ratio of variance of X to Y? (10)

सहसंबंध और प्रतिगमन के बीच अंतर पर चर्चा करें। मान लें कि  $4Y-X+2=0$  तथा  $8Y-X-24=0$  युग्मित प्रेक्षण (X,Y) के आधार पर दो समाश्रयण रेखाएं हैं। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

- (i) दोनों चर का माध्य
- (ii) दोनों रेखाओं के बीच न्यून कोण क्या होगा?
- (iii) X के अनुमानित मान में वृद्धि या कमी प्रतिशत अगर Y, Y= 2 से Y = 4 में बदलता है
- (iv) X और Y के बीच सहसंबंध का गुणांक
- (v) X के प्रसरण से Y के प्रसरण का अनुपात

6. (a) Define F distribution and obtain its mode and point of inflexion. If  $F(n_1, n_2)$  represents a “F” variate with  $n_1$  and  $n_2$  d.f., then show that  $F(n_2, n_1)$  is distributed as  $1/F(n_1, n_2)$  variate. Further deduce that

$$P\{F(n_1, n_2) \geq C\} = P\left\{F(n_2, n_1) \leq \frac{1}{C}\right\} \quad (10)$$

F बंटन को परिभाषित कीजिए और इसके बहुलक और मोड़ के बिंदु को प्राप्त कीजिए. यदि  $n_1$  और  $n_2$  स्वातंत्र्य स्तर के साथ  $F(n_1, n_2)$  एक “F” चर को प्रदर्शित करता है तो दिखाइए कि  $F(n_2, n_1)$  चर  $1/F(n_1, n_2)$  को प्रदर्शित करेगा. आगे यह भी दिखाए कि

$$P\{F(n_1, n_2) \geq C\} = P\left\{F(n_2, n_1) \leq \frac{1}{C}\right\}$$

- (b) The probability mass function of random variable X is:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1 - \theta & \text{if } x = 0 \\ \theta & \text{if } x = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Let  $x_1, x_2, \dots, x_n$  be a random sample of size n from above distribution and  $T = \sum_{i=1}^n x_i$ . Obtain the sampling distribution of T. Show that variance of T is  $n\theta - n\theta^2$ .

(10)

यादृच्छिक चर  $X$  का प्रायिकता मात्रा फलन

$$P_X(x) = \begin{cases} 1 - \theta & \text{if } x = 0 \\ \theta & \text{if } x = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

है. मान लें कि  $x_1, x_2, \dots, x_n$  इस बंटन से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है और  $T = \sum_{i=1}^n x_i$ .  $T$  का प्रतिदर्श बंटन प्राप्त कीजिए. दिखाइए कि  $T$  का प्रसरण  $n\theta - n\theta^2$  है.

7. (a) State and prove Cramer-Rao Inequality by stating its regularity conditions. (10)

क्रैमर-राव असमायिका को इसकी नियमितता की शर्तों को बताते हुए बताएं और सिद्ध करें।

- (b) Given the probability density function:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

Show that the Cramer-Rao lower bound of variance of an unbiased estimator of  $\theta$  is  $2/n$ , where  $n$  is the size of the random sample drawn from this distribution. (10)

दिए गए प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

के लिए दिखाएँ कि  $\theta$  के एक निष्पक्ष आकलक के प्रसरण का क्रैमर-राव निम्न सीमा  $2/n$  है, जहाँ  $n$  इस बंटन से लिए गए यादृच्छिक नमूने का आकार है।

8. (a) What is meant by BLACKWELLISATION? State and prove RAO-BLACKWELL theorem. (10)

BLACKWELLISATION का क्या अर्थ है? राव-ब्लैकवेल प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

- (b) Explain the maximum likelihood method of estimation. Discuss the properties of estimator obtained by method of maximum likelihood. Obtain maximum likelihood estimators of parameters of normal distribution when both parameters are unknown.

आकलन की अधिकतम प्रायिकता विधि की व्याख्या कीजिए। अधिकतम प्रायिकता विधि द्वारा प्राप्त आकलक के गुणों की चर्चा कीजिए। प्रसामान्य बंटन के प्राचलों के अधिकतम संभावना आकलकों को प्राप्त करें जबकि दोनों प्राचल अज्ञात हों। (10)

\*\*\*\*\*